Revista Pedagogia – UFMT Número 10 Jan/Jun 2019

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIOS DE MÉTODOS DIRETOS

Gisley de Souza Brito[1]
Juracy Mendes Moreira[2]
Fernanda Mendes Farias[3]
Arthur Lopes Silva[4]
Gustavo Silva de Oliveira[5]

RESUMO: Em diversas disciplinas na matemática, sistemas de equações lineares são muito importantes na modelagem de uma situação cotidiana, neste estudo, abordaremos o problema de descrever o conjunto de soluções de um sistema linear, que pode ser encontrado por métodos diretos ou iterativos. Para um melhor entendimento sobre sistemas lineares precisamos rever alguns conceitos básicos sobre equação linear. Consideramos como equação linear toda equação do tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 +, \ldots, +a_nx_n = c$. Chama-se sistema linear a n incógnitas um conjunto de duas ou mais equações lineares com n incógnitas. O objetivo proposto com o estudo é investigar a resolução de sistemas lineares por métodos diretos, com a utilização de operações elementares para obtenção dos conjuntos soluções desses sistemas. O estudo deu-se por meio de uma revisão de literatura com enfoque aos métodos diretos para a resolução de sistemas lineares extraídas de literatura própria, conteúdos teóricos tornam-se abstrato e pouco atrativo ao aluno prejudicando assim o aprendizado. Nesse estudo buscou-se mostrar que a solução de um sistema linear pode ter uma aplicação prática em sua vida profissional. Como sugestão para novos trabalhos, seria interessante pensar em algo que envolvesse outras áreas de conhecimento e não apenas o estudo da disciplina em si.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Lineares. Determinantes. Matrizes.

[1] *Professor MsC. Centro Universitário Montes Belos. E-mail: Gisley.brito@fmb.edu.br*
[2] *Professor MsC. Centro Universitário Montes Belos. E-mail: juraci.moreira@fmb.edu.br*
[3] *Docente Esp. Centro Universitário Montes Belos. E-mail: fernanda.mendes@fmb.edu.br*
[4] *Aluno de Engenharia Civil – Centro Universitário Montes Belos. E-mail: arthurls631@gmail.com*
[5] *Aluno de Engenharia Civil – Centro Universitário Montes Belos. E-mail:gustavosilva20@outlook.com*

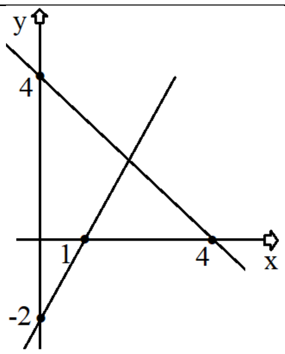
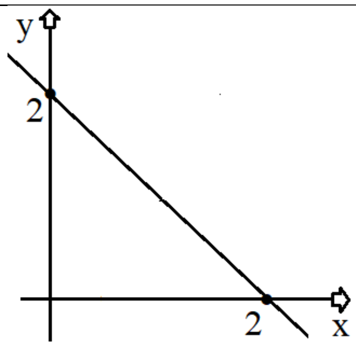
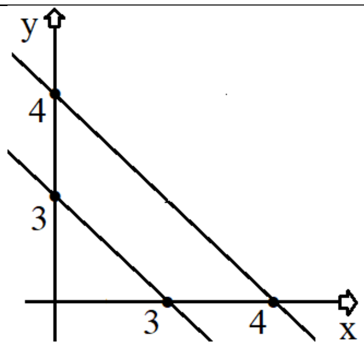
Revista Pedagogia – UFMT Número 10 Jan/Jun 2019

Introdução

Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações linear aplicadas num mesmo conjunto, igualmente finito, de variáveis. Consideramos como equação linear toda equação do tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 +, \dots, + a_nx_n = c$. Sendo: $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_n \rightarrow$ São os coeficientes reais, não todos nulos; $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots, x_n \rightarrow$ São as incógnitas e c é o termo independente. Os sistemas de equações lineares fazem parte da descrição matemática dos mais diversos fenômenos em quase todas as ciências e também é muito utilizado em diversos algoritmos da computação.

O conjunto solução de um sistema linear poderá ser vazio; poderá ter uma única solução ou ainda infinitas soluções. No caso de um sistema de duas equações e duas incógnitas, cada equação representa uma reta no R^2, nesse caso, conjunto solução será vazio se as retas forem paralelas; possuirá apenas uma solução se as retas se cruzarem ou infinitas soluções se as retas se sobrepuserem. BOLDRINI (1986). A solução do sistema $S_1 = \begin{cases} 1x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ será dado pelo par ordenado (x, y), ou seja, $(2,2)$. Como as retas r_1 e r_2 se cruzam o sistema tem solução única. O sistema $S_2 = \begin{cases} 1x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ apresenta infinitas soluções, pois o determinante D da matriz é igual a zero e também $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$. Neste caso, as retas r_1 e r_2 se sobrepõem. Enquanto que o $S_3 = \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ não tem solução, pois não existem números reais que somados entre si de resultado igual a 3 e 4 ao mesmo tempo. Neste caso, as retas r_1 e r_2 são paralelas. O gráfico das retas de S_1, S_2, e S_3 será apresentado a seguir:

Gráfico 1. Representação das equações de S_1, S_2 e S_3

Representação de S_1	Representação de S_2	Representação de S_3
		

Classificação de um sistema linear

Quanto ao número de soluções um sistema linear pode ser possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível. O sistema possível e determinado (SPD) tem solução única. Nesse caso, o determinante D da matriz deve ser diferente de zero. O sistema possível e indeterminado (SPI) tem infinitas soluções. Um sistema linear será indeterminado quando o determinante D da matriz for igual a zero e também $D_1 = D_2 = D_3 = \cdots = D_n = 0$. E O sistema impossível (SI) não tem solução. Quando um sistema é impossível, se determinante D da matriz for igual a zero e D_i é não nulo par pelo menos um $i \in \{1,\ 2, \dots, n\}$.

A classificação de um sistema linear é dada por:

$$Sistema\ linear \begin{cases} Possivel \begin{cases} Determinado \\ Indeterminado \end{cases} \\ Impossivel \end{cases}$$

Discussão de sistemas lineares

A discussão de um sistema linear consiste em determinar para quais valores de um parâmetro o sistema é SPD, SPI ou SI. Segundo LIMA (2008), com o cálculo do determinante da matriz incompleta do sistema e das matrizes das incógnitas, utilizada na Regra de Cramer, é possível tirar diversas conclusões sobre o sistema linear em estudo:

$$Sistema\ Linear \begin{cases} D \neq 0 \to SPD \\ D = 0 \to SPI\ ou\ SI \begin{cases} D_1 = D_2 = D_n = 0 \to SPI \\ \exists\ pelo\ menos 1\ D \neq 0 \to SI \end{cases} \end{cases}$$

Um sistema de equações lineares pode ser representado de forma matricial através da seguinte equação:

$A * x = b$

Sendo; que a matriz A e o vetor coluna b são os dados de entrada do problema numérico e a solução é dado pelo vetor coluna x

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \text{é a matriz dos coeficientes}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{é o vetor coluna das incógnitas}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{é o vetor coluna dos termos independentes.}$$

A relação entre sistemas de equações lineares e matrizes foi criada com a finalidade de determinar o valor das incógnitas envolvendo cálculo de determinantes de matrizes utilizando regra de Cramer, que consiste na relação entre a matriz dos coeficientes das incógnitas e a matriz dos coeficientes independentes.

Considere o sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$, terá a seguinte representação matricial

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & +6 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Uma das propriedades de um sistema de equações é que a ordem em as equações é colocada no sistema, não altera a sua solução. Portanto, se trocarmos a posição de duas linhas quaisquer de um sistema linear, o resultado não será afetado, essa operação é denominada de operação elementar. Os métodos que utilizam uma sequência finita de operações elementares para determinar a solução de um sistema são denominados métodos diretos. BOULOS (2005).

Métodos diretos

Os métodos Diretos são aqueles que fornecem uma solução exata após um número finito de operações elementares. São eles:

$$Métodos\ diretos \begin{cases} Regra\ de\ Cramer \\ Inversão\ da\ matriz\ A \\ Eliminação\ de\ Gauss \\ Fatoração\ de\ LU \end{cases}$$

Regra de Cramer

Conforme DANTE (2007), a regra de Cramer é um método prático usado para determinar a solução de um sistema linear, mas só poderá ser utilizado se o número de equações e o número de incógnitas forem iguais.

A resolução de um sistema linear deve iniciar pelo calculo o determinante (D) da matriz incompleta do sistema e em seguida substituir os termos independentes em cada coluna e calcular seus respectivos determinantes. Para o uso da regra de Cramer o cálculo do determinante da matriz incompleta do sistema, que é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas será apresentado a seguir:

Considere inicialmente o seguinte sistema: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \rightarrow$ é a matriz incompleta do sistema

$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \rightarrow$ é o determinante da matriz incompleta do sistema

$Dx = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ → é o determinante da matriz obtida através troca dos coeficientes x pelos termos independentes da matriz incompleta do sistema.

$Dy = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$ → é o determinante da matriz obtida através troca dos coeficientes y pelos termos independentes da matriz incompleta do sistema.

A regra de Cramer pode ser usada para resolver um sistema de equações $n\ x\ n$, onde $D \neq 0.$ Para valores de $D = 0$, o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. A solução é dada pelas razões:

$$\left(x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}\right)$$

Inversão da matriz *A*

Segundo LEON (2011), uma matriz é chamada de inversa se, e somente se seu determinante for diferente de zero, por isso, a matriz deve ser obrigatoriamente quadrada. Para determinar a matriz inversa, partiremos da definição que diz que o produto de uma matriz de ordem n pela sua inversa também de ordem n é a matriz identidade I_n, isto é: $A * A^{-1} = I_n$. Caso não seja possível a obtenção da matriz inversa, o sistema linear não tem solução. Esse método é bastante simples, porém, muito trabalhoso quando se trata de matrizes de ordem grande, o nos leva a n sistemas com n equações..

Consideremos A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A^{-1} é a matriz inversa de A se, e somente se, $A * A^{-1} = I_n$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss (escalonamento)

Revista Pedagogia – UFMT Número 10 Jan/Jun 2019

Para CALLIOLI (2003), o método de eliminação de Gauss ou escalonamento é uma ferramenta muito útil na resolução direta de sistemas de equações lineares. É um algoritmo que consiste em aplicar sucessivas operações elementares em um sistema de equações lineares, com o objetivo de simplificar sua resolução, sem modificar a solução original.

Operações elementares entre linhas

Existem três operações básicas que podem ser usadas em um sistema linear, sem alterar a solução dos mesmos:

- Multiplicar uma equação e somar o resultado com outra equação;
- Trocar a ordem em que as equações aparecem no sistema.
- Multiplicar ou dividir uma equação por uma constante.

Com o uso de algumas operações matemáticas passa para a forma escalonada, ou seja, uma matriz triangular superior. VENTURI (2010). Sistema linear com duas equações e duas incógnitas, onde x, y são incógnitas e 7 e 1 são os termos independentes. Na forma escalonada.

$$S_4 = \begin{cases} 1x + 3y = 7 \\ \quad\;\; - 1y = 1 \end{cases}$$

Sistema linear com três equações e três incógnitas, onde $x, y\ z$ são incógnitas e 7, 1 e 6 são os termos independentes. Na forma escalonada.

$$S_5 = \begin{cases} 1x + 3y - 3Z = 7 \\ \quad\;\; - 1y - 2z = 1 \\ \qquad\qquad\;\; 2z = 6 \end{cases}$$

As operações elementares são reversíveis, ou seja, é possível retornar ao sistema inicial aplicando a sequência de operações novamente, em uma ordem inversa.

Resolução de um sistema linear Eliminação de Gauss (escalonamento)

Considere o sistema linear apresentado abaixo, a resolução de um sistema linear pelo método do escalonamento consiste em transforma-lo em um sistema conforme o apresentado em S_5 através de algumas manipulações algébricas.

$$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = 3 \\ 2x - 3y - 1z = 4 \\ 3x - 1y - 2z = 1 \end{cases}$$

1º Passo: O coeficiente da primeira incógnita da primeira linha deve ser igual a um.

2º Passo: Zerar o coeficiente da primeira incógnita da segunda equação, multiplicando a primeira equação por menos dois e o resultado somar com a segunda equação:

$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = 3\ (-2) + 2^{a} \\ 2x - 3y - 1z = 4 \\ 3x - 1y - 2z = 1 \end{cases}$	$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = +3 \\ 0x - 7y - 3z = -2 \\ 3x - 1y - 2z = +1 \end{cases}$

3º Passo: Zerar o coeficiente da primeira incógnita da terceira equação, multiplicando a primeira equação por menos três e o resultado somar com a terceira equação:

$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = +3\ (-3) + 3^{a} \\ 0x - 7y - 3z = -2 \\ 3x - 1y - 2z = +1 \end{cases}$	$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = +3 \\ 0x - 7y - 3z = -2 \\ 0x - 7y - 5z = -8 \end{cases}$

4º Passo: Zerar o coeficiente da segunda incógnita da terceira equação, multiplicando a segunda equação por menos um e o resultado somar com a terceira equação:

$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = +3 \\ 0x - 7y - 3z = -2\ (-1) + 3^{a}. \\ 0x - 7y - 5z = -8 \end{cases}$	$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = +3 \\ 0x - 7y - 3z = -2 \\ 0x - 0y - 2z = -6 \end{cases}$

Dessa forma temos um sistema escalonado, e podemos concluir que:

$-2z = -6$

$z = \frac{-6}{-2}$

$z = 3$

Substituindo $z = 3$ na segunda equação encontramos o valor do y

$-7y - 3z = -2$

$-7y - 3\,(3) = -2$

$-7y - 9 = -2$

$-7y = -2 + 9$

$-7y = 7$

$y = -1$

Substituindo $z = 3$ e $y = -1$ na primeira equação encontramos o valor do x

$x + 2y + 1z = +3$

$x + 2(-1) + 1(3) = 3$

$x - 2 + 3 = 3$

$x = 3 - 3 + 2$

$x = 2$

Logo os números $(2, -1, 3)$ são respectivamente (x, y, z) que são as soluções do sistema, concluímos, portanto, que é um sistema SPD.

Métodos de decomposição LU

Por SEBASTIANI (2004), a decomposição LU é uma forma de fatoração de uma matriz não singular como o produto de uma matriz triangular inferior (L) e uma matriz triangular superior (U), ou seja, $A = LU$. Esta decomposição é usada na resolução de sistemas de equações ou na determinação de matrizes inversas. Aqui abordaremos a decomposição de LU pelo método eliminação de Gauss. Segundo GRANDO (2001), o Método de Gauss é usado para resolver sistemas de equações lineares, onde a matriz dos coeficientes é tridiagonal. Uma matriz quadrada é dita tridiagonal quando os únicos elementos não nulos estão na diagonal principal e nas diagonais imediatamente acima e abaixo dela. E um sistema de equações lineares é denominado tridiagonal quando a matriz associada a ele for tridiagonal. Neste caso, a matriz A é fatorada em duas matrizes triangulares L e U. Facilitando assim a obtenção do conjunto solução de um sistema de equações lineares. Uma fatoração de LU de uma dada matriz quadrada é dada por:

$$A = LU$$

Onde L é triangular inferior e U é a triangular superior. Conforme figura abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{3} \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos da diagonal principal da matriz L é composta por todos os elementos iguais a 1. Considere como exemplo da decomposição de LU, o sistema com três equações e três incógnitas abaixo:

$$A = \begin{cases} 1x + 2y + 1z = 3 \\ 2x - 3y - 1z = 4 \\ 3x - 1y - 2z = 1 \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Gauss no escalonamento de sistemas temos como modelo:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \\ \mathbf{0} - y_2 - z_2 \\ \mathbf{0} - \mathbf{0}\boldsymbol{y} - z_3 \end{cases}$$

Nota-se que a primeira equação permanece inalterada, mas a partir da segunda há um aumento dos coeficientes nulos na ordem de cima para baixo, desse modo dizemos que o sistema esta escalonado. Para o exemplo citado tomaremos (A), como uma matriz incompleta do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ +2 & -3 & -1 \\ +3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o teorema de Gauss em A, teremos uma matriz escalonada denominada de U.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & +2 & +1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dessa forma temos uma matriz triangular superior U, onde os elementos abaixo dela são todos nulos. Ou seja, a matriz U é resultante do escalonamento de Gauss.

A matriz L é formada pelos multiplicadores usados para escalonar a matriz A. Para zerar m_{21} (elemento da segunda linha e primeira coluna) foi usado o numero 2, Para zerar m_{31} (elemento da terceira linha e primeira coluna) foi usado o numero 3, e Para zerar m_{32} (elemento da terceira linha e segunda coluna) foi usado o numero 1. Dessa forma os números $(2{,}3, e\ 1)$ vão compor a matriz L.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim temos uma matriz L onde os elementos da diagonal principal valem um, acima dela são todos nulos, e abaixo da diagonal principal temos uma matriz triangular inferior L onde seus elementos são os multiplicares usados para escalonar A.

Construção do sistema

Todo sistema linear pode ser escrito na forma $AX = b$, onde b é o termo independente do sistema linear A, admitindo $A = LU$ teremos um sistema escrito na forma $LUX = b$, e fazendo $UX = Y$, temos um novo sistema $LY = b$. Dessa forma teremos dois sistemas para resolver.

- $LY = b$
- $UX = Y$

Resolvendo o sistema $LY = b$, temos,

$$LY = b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema nos dará o vetor coluna $Y = \begin{bmatrix} +3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$, que será usado na resolução do segundo sistema $UX = Y$.

Resolvendo o segundo sistema $UX = Y$, temos:

$$UX = Y = \begin{bmatrix} 1 & +2 & +1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema teremos o vetor coluna $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, que é a solução do sistema linear A.

Aplicação de sistemas lineares na modelagem de situações cotidianas.

Sistemas lineares tem infinitas aplicações dentro das mais diversas áreas situações do cotidiano das pessoas, como exemplo citaremos:

Situação 1.

Um comerciante pediu a seu funcionário que pesasse três sacos de batata. O rapaz voltou exausto, e disse:

- O primeiro e o segundo saco pesam juntos, tem 110 kg. O primeiro e o terceiro, juntos, pesam 120 kg. E o segundo e o terceiro, juntos pesam têm 112 kg. Mas o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco. Para diminuir o esforço físico do funcionário podemos utilizar a resolução de um sistema linear para determinar o peso de cada saco.

As varáveis apresentadas são:

- x: Peso do saco 1
- y: Peso do saco 2 e
- z: Peso do saco 3.

Montando um sistema temos:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ x + z = 120 \\ y + z = 112 \end{cases}$$

1º Passo: Isolar x na primeira equação

$x + y = 110$

$x = 110 - y$

2º Passo: Isolar z na terceira equação

$y + z = 112$

$z = 112 - y$

3º Passo: Substituir x e z na segunda equação

$x + z = 120$

$(110 - y) + (112 - y) = 120$

$110 - y + 112 - y = 120$

$y = 51$

4º Passo: Substituir y na primeira equação

$x + y = 110$

$x + 51 = 110$

$x = 59$

5º Passo: Substituir y na terceira equação

$x + y = 110$

$51 + z = 112$

$z = 61$

Utilizando o método da substituição na resolução de sistema linear obtemos o vetor coluna peso (P).

Situação 2.

Uma escola do ensino médio tem 107 alunos nos 1º e 2º anos, 74 nos 2º e 3º anos e 91 nos 1º e 3º anos. Determine o número de alunos na escola, utilizando um sistema de equações matriciais.

As varáveis apresentadas são:

- x: Alunos do 1º ano
- y: Alunos do 2º ano e
- z: Alunos do 3º ano.

$$\begin{cases} 1x + 1y + 0z = 107 \\ 0x + 1y + 1z = 74 \\ 1x + 0y + 1z = 91 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = 107 \\ y + z = 74 \\ x + z = 91 \end{cases}$$

Isolando y na segunda equação temos:

$y + z = 74$

$y = 74 - z$

Substituindo na primeira equação temos:

$x + y = 107$

$x - z = 107 - 74$

$x - z = 33$

Da 1º e da 3º equação vem: $\begin{cases} x - y = 33 \\ x + z = 91 \end{cases}$

O total de alunos da escola é $x + y + z$, ou seja, $62 + 45 + 29 = 136$ alunos.

Considerações Finais

Muitas vezes os conteúdos teóricos, como o apresentado, tornam-se abstrato e pouco atrativo ao aprendizado do aluno. Nesse estudo buscou-se mostrar algumas maneiras diretas de se resolver um sistema linear e que esses conjuntos soluções pode ter uma utilidade prática em sua vida profissional. Como sugestão para novos trabalhos, seria interessante pensar em algo interdisciplinar, envolvendo outras áreas de conhecimento e não apenas a disciplina em estudo.

REFERÊNCIAS

BOULOS, PAULO; CAMARGO, IVAN DE. **Geometria Analítica. Um Tratamento Vetorial** 3 ed. São Paulo: Prentice Hall. 2005.

BOLDRINI; COSTA e FIGUEIREDO; WETZLER. **Álgebra Linear** 3ª ed. [S.l.]: Harbra. 412 páginas. 1986.

CALLIOLI, CARLOS A.; DOMINGUES, HYGINO H.; COSTA, ROBERTO C.F.**Álgebra Linear e Aplicações**. [S.l.]: Atual. 352 páginas. 2003.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**: 1° a 5° séries. 12. ed. São Paulo: Editora Ática, 2007.

GRANDO, R. C. e FAZZION, M. F. **Álgebra e Geometria na Resolução de um Problema Clássico em Matemática**. Revista de Educação Matemática SBEM - SP, n. 6 e 7, p.23 - Catanduva - SP, 2001.

LEON, STEVAN J. **Álgebra Linear e Suas Aplicações** 8ª ed. [S.l.]: LTC. 504 páginas. 2011.

LIMA, ELON LAGES. **Geometria analítica e álgebra linear** 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2008.

SEBASTIANI, MARCOS. **Introdução à Geometria Analítica Complexa**. Rio de Janeiro. 2004.

VENTURI, JACIR J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.** 8 ed. Curitiba. 2010.